| | | |
|---|---|---|
| TS | Devoir surveillé N°2 | Mercredi 21/11/18 |

Nom et Prénom :……………………………………………………………………………………………………………………………….

### Exercice 1 : VOYAGE DANS LA CEINTURE D'ASTÉROïDES (15 points)

« Le moteur le plus courant de l'univers du film Star Wars est un propulseur ionique. Il est amusant de constater que cette technologie a déjà été réellement utilisée.
La sonde Dawn avait pour mission d'étudier Vesta et Cérès, les deux principaux corps de la ceinture d'astéroïdes. C'est grâce à ses propulseurs ioniques qu'elle a pu passer d'un astéroïde à l'autre.
Le principe du moteur ionique consiste à ioniser un gaz inerte comme le xénon (c'est-à-dire à produire des ions), à l'aide d'un fort courant électrique. Ensuite, un champ électrique intense accélère les ions produits qui, éjectés par une tuyère, propulsent le vaisseau dans la direction opposée à leur flux. Ce mode de propulsion est très économe : à puissances égales, un moteur ionique consomme dix fois moins de combustible qu'un moteur de fusée classique. Cependant, les moteurs ioniques actuels ne produisent que des accélérations assez faibles et sont tout à fait incapables d'exécuter les acrobaties que réalisent les chasseurs interstellaires de Star Wars.»


D'après Roland Lehoucq – « Faire des sciences avec Star Wars »

**Données :**

- charge électrique élémentaire : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C ;
- constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m$^2$.kg$^{-2}$ ;
- masse d'un ion xénon : $m = 2{,}18 \times 10^{-25}$ kg ;
- expression du champ électrique : $E = \frac{U}{d}$
- la valeur de la célérité c de la lumière dans le vide est supposée connue par le candidat.

Dans cet exercice, on étudiera le principe simplifié de la propulsion ionique, puis dans une partie indépendante, on déterminera la masse de l'astéroïde Cérès.

**1. La propulsion ionique (7,75 points)**

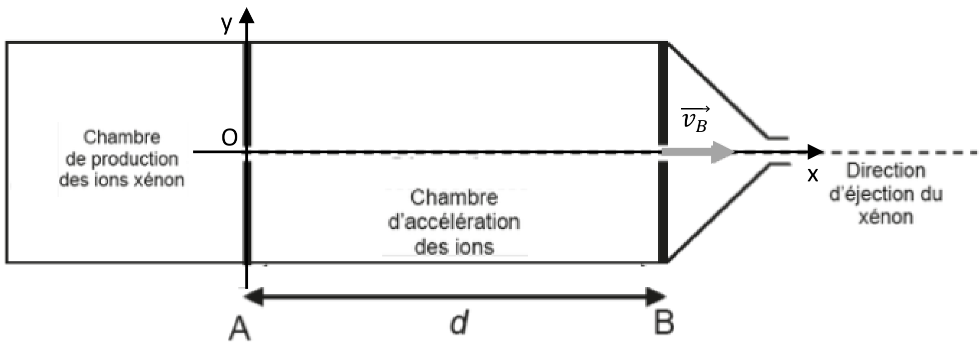



Figure 1. Schéma de principe simplifié d'un moteur ionique.

Les ions xénon créés sont accélérés entre les grilles A et B par un champ électrique $\vec{E}$ supposé uniforme. À la sortie de la chambre d'accélération, un dispositif appelé neutraliseur, transforme les ions xénon en atomes de xénon, afin de maintenir la charge électrique globale de la sonde Dawn constante.
Les ions xénon $Xe^+$, de masse $m$, pénètrent dans la chambre d'accélération en O, avec une vitesse que l'on considèrera nulle. Une tension électrique $U$ constante est appliquée entre les grilles A et B telle que $V_A$ = +150 MV et $V_B$ = -150 MV (figure 1).

**1.1.** Sur la figure 1, représenter sans souci d'échelle et en justifiant les tracés :

- le vecteur champ électrique $\vec{E}$ en un point quelconque situé entre les plaques 0,5
- le vecteur force électrique $\vec{F_e}$ en un point de la trajectoire 0,5

**1.2.** En utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer les équations horaires x(t) et y(t) du mouvement d'un ion xénon dans le référentiel « moteur ionique ». Le poids de l'ion xénon est négligeable devant la force électrique. 4,5

**1.3.** Montrer que l'expression de la vitesse $v_B$ d'un ion xénon à la sortie de la chambre d'accélération est : 1,5

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \times e \times U}{m}}$$

**1.4.** Déterminer, pour une tension accélératrice de 300 MV, la valeur de la vitesse d'éjection des ions xénon. Commenter la valeur obtenue. 0,75

### 2. L'astéroïde Cérès (7,25 points)

En 2015, la sonde Dawn s'est mise en orbite quasi-circulaire de rayon $r$ autour de l'astéroïde Cérès. Ses moteurs ioniques désactivés, la sonde Dawn a effectué une révolution autour de Cérès en 15 jours à la vitesse $v$.

Données :

- rayon moyen de l'astéroïde Cérès : R = 470 km
- altitude moyenne de la sonde Dawn autour de Cérès : h = 13,5 Mm
- masse réelle de Cérès : $M_C = 9{,}46 \times 10^{20}$ kg

**2.1.** Donner l'expression vectorielle de la force exercée par Cérès sur la sonde Dawn. Faire un schéma représentant cette force ainsi que le repère de Frenet $(\vec{t}, \vec{n})$. On notera $M_D$ la masse de la sonde Dawn. 1,25

**2.2.** Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire, le mouvement de la sonde Dawn autour de Cérès est uniforme. 2

**2.3.** Établir que la vitesse $v$ de la sonde Dawn sur son orbite de rayon $r$ autour de Cérès est donnée par la relation : 0,5

$$v = \sqrt{\frac{G \times M_C}{r}}$$

**2.4.** Énoncer la troisième loi de Kepler. 0,5

**2.5.** Dans le cas d'un mouvement circulaire, déterminer l'expression de la constante présente dans la troisième loi de Kepler. 1,5

**2.6.** Déterminer la masse de l'astéroïde Cérès dans le cadre de l'hypothèse d'un mouvement circulaire. Commenter. 1,5

## Exercice 2 : L'acide borique (5 points)

L'acide borique peut être utilisé comme antiseptique pour les brûlures ou les coupures et est parfois employé dans les pommades et les onguents ou encore en solution très diluée comme bain oculaire. L'acide borique est également souvent utilisé comme insecticide relativement peu toxique, pour l'extermination des cancrelats, termites, fourmis, puces, et beaucoup d'autres insectes.

L'acide borique $H_3BO_3$ est un acide faible qui réagit avec l'eau. On se propose d'étudier quelques propriétés d'une solution aqueuse S de cet acide de pH = 6,8.

1. a - Définir un acide et une base dans la théorie de Brönsted. 1

   b - En déduire les couples acide/base mis en jeu et écrire les demi-équations correspondantes. 1,5
2. En déduire l'équation de la réaction entre l'acide borique et l'eau. 0,5
3. Exprimer la constante d'acidité $K_A$ associée au couple étudié. 0,5
4. A 25°C, le $pK_A$ du couple vaut 9,2. En déduire la valeur de $K_A$. 0,5
5. Représenter le diagramme de prédominance du couple et en déduire l'espèce prédominante dans la solution S. 1

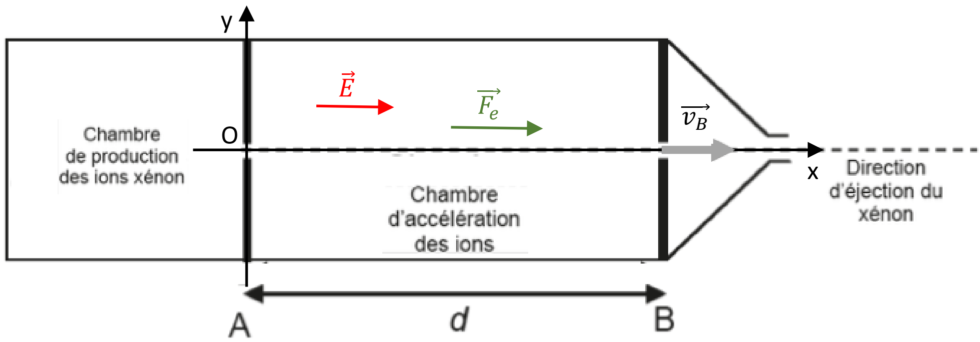
CORRECTION

Exercice 1 :

**1 .La propulsion ionique**

**1.1/** Le champ électrique descend les potentiels, la grille A a un potentiel $V_A$ = +150 kV plus grand que la grille B $V_B$ = -150 kV. Le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ est donc orienté de la grille A vers la grille B.

L'expression de la force électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{F_e}}$ est : $\overrightarrow{\boldsymbol{F_e}} = \boldsymbol{q} \times \vec{\boldsymbol{E}}$.
L'ion xénon est positif donc q>0, alors $\overrightarrow{\boldsymbol{F_e}}$et $\vec{\boldsymbol{E}}$ont la même direction et le même sens.




**1.2/** On étudie le **système** « ion xénon » dans le **référentiel** moteur ionique auquel on a associé le **repère** (O, x,y).

Les coordonnées du vecteur champ électrique sont $\vec{\boldsymbol{E}}\begin{Bmatrix} E_x = +E \\ E_y = 0 \end{Bmatrix}$.

D'après le texte, les **conditions initiales** sont :

- pour la vitesse : $\vec{\boldsymbol{v}}_0 \begin{Bmatrix} v_x(0) = 0 \\ v_y(0) = 0 \end{Bmatrix}$
-
- pour la position : $x_0 = y_0 = 0\ m$

**Bilan des forces** exercées sur le système : le poids est négligeable donc il n'y a que $\overrightarrow{\boldsymbol{F_e}}$.

D'après le 2ème loi de Newton, on peut écrire : $\vec{F_e} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \times \vec{a}$ avec $\vec{F_e} = q \times \vec{E}$ et $q = e$ pour l'ion xénon $Xe^+$.

D'où $e \times \vec{E} = m \times \vec{a}$ soit $\vec{a} = \frac{e}{m} \times \vec{E}$ d'où $\vec{\boldsymbol{a}}\begin{Bmatrix} a_x = \frac{e}{m} \times E \\ a_y = 0 \end{Bmatrix}$

On sait que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ On cherche la primitive de $\vec{a}$ pour trouver les coordonnées de $\vec{v}$.

$\vec{\boldsymbol{v}}\begin{Bmatrix} v_x = \frac{e}{m} \times E \times t + C_1 \\ v_y = C_2 \end{Bmatrix}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

à $t = 0$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v_0}}\begin{Bmatrix} v_{x0} = C_1 \\ v_{y0} = C_2 \end{Bmatrix}$ or $v_0 = 0$ donc $C_1 = C_2 = 0$ soit $\vec{\boldsymbol{v}}\begin{Bmatrix} v_x = \frac{e}{m} \times E \times t \\ v_y = 0 \end{Bmatrix}$

On sait que $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ On cherche la primitive de $\vec{v}$ pour trouver les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\begin{Bmatrix} x = \frac{1}{2} \times \frac{e}{m} \times E \times t^2 + C_3 \\ y = C_4 \end{Bmatrix}$ où $C_3$ et $C_4$ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

à $t = 0$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OM_0}}\begin{Bmatrix} x_0 = C_3 \\ y_0 = C_4 \end{Bmatrix}$ or $x_0 = y_0 = 0$ donc $C_3 = C_4 = 0$ soit $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\begin{Bmatrix} x = \frac{e}{2 \times m} \times E \times t^2 \\ y = 0 \end{Bmatrix}$

**1.3/** A la sortie de la chambre d'accélération, l'abscisse est telle que : $x_B = d$ on détermine alors la date de sortie de la chambre notée $t_B$ : $x_B = d = \frac{e}{2\times m} \times E \times {t_B}^2$ soit $t_B = \sqrt{\frac{2\times d\times m}{e\times E}}$

La vitesse à la sortie de la chambre d'accélération est horizontale (coordonnées seulement suivant x) donc $v_B$ telle que :

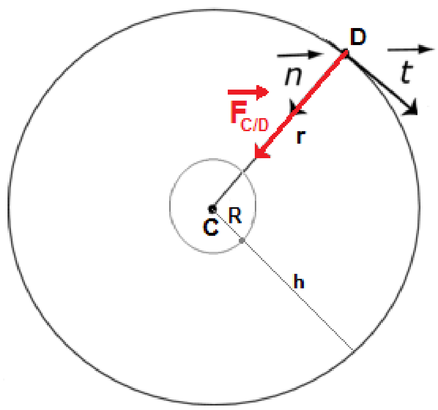
$$v_B = \sqrt{\left(v_x(t_B)\right)^2 + \left(v_y(t_B)\right)^2} = v_x(t_B) = \frac{e}{m} \times E \times t_B = \frac{e}{m} \times E \times \sqrt{\frac{2 \times d \times m}{e \times E}} = \sqrt{\frac{e^2}{m^2} \times E^2 \times \frac{2 \times d \times m}{e \times E}}$$

D'où $v_B = \sqrt{\frac{2\times e\times E\times d}{m}}$ or $E = \frac{U}{d}$ soit $E \times d = U$ ou encore $v_B = \sqrt{\frac{2\times e\times U}{m}}$

**1.4/** Application numérique : si U= 300 MV = 300 x $10^6$ V alors $v_B = \sqrt{\frac{2\times 1{,}60.10^{-19}\times 300.10^6}{2{,}18.10^{-25}}} = 2{,}10\,.10^7 m.s^{-1}$

Cette valeur est environ 10 fois plus faible que la célérité de la lumière dans le vide qui est c = 3,00.$10^8$ m.$s^{-1}$.

## 2. L'astéroïde Cérès




**2.1/** L'expression de la force exercée par Cérès sur la sonde Dawn est :

$$\vec{F}_{C/D} = +G \times \frac{M_D \times M_C}{r^2} \times \vec{n}$$

**2.2/** On étudie :

le **système** « sonde Dawn »

le **référentiel** centré sur Cérès auquel on a associé le **repère** de Frenet (C, $\vec{t}, \vec{n}$) où le point C représente le centre de Cérès.

**Bilan des forces** exercées sur le système : la force exercée par Cérès sur la sonde Dawn

D'après la 2ème loi de Newton, on peut écrire :

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_D \times \vec{a} \quad \text{avec} \quad \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{C/D} = +G \times \frac{M_D\times M_C}{r^2} \times \vec{n}$$

D'où $G \times \frac{M_D\times M_C}{r^2} \times \vec{n} = M_D \times \vec{a}$ soit en simplifiant l'expression par la masse $M_D$ : $\vec{a} = G \times \frac{M_C}{r^2} \times \vec{n}$

L'accélération est telle que : $\vec{a} = a_t \times \vec{t} + a_n \times \vec{n}$ où $a_t = \frac{dv}{dt}$ et $a_n = \frac{v^2}{r}$

On peut observer que l'accélération est centripète (orientée vers le centre de la trajectoire) et que $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ donc la vitesse est constante (en norme). Le mouvement est circulaire uniforme.

**2.3/** On a démontré que le mouvement est circulaire uniforme à la vitesse $v$ telle que : $a_n = \frac{v^2}{r}$

Donc on peut écrire : $a_n = \frac{v^2}{r} = G \times \frac{M_C}{r^2}$ soit $v = \sqrt{\frac{G\times M_C}{r}}$ où $r = R + h$ soit $v = \sqrt{\frac{G\times M_C}{R+h}}$

**2.4/** Enoncé de la troisième loi de Kepler ou "Loi des périodes" : *le carré de la période de révolution **T** d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe **a** de la trajectoire elliptique de la planète* autour du Soleil. Soit $\frac{T^2}{a^3} = constante$

**2.5/** Dans le cas d'un mouvement circulaire, on peut écrire $a = r$ d'où l'expression de la 3[ème] loi de Képler : $\frac{T^2}{r^3} = constante$

Par définition, la vitesse et la période sont liées par la relation : $v = \frac{2\pi \times r}{T}$ soit $T = \frac{2\pi \times r}{v}$ avec $v = \sqrt{\frac{G \times M_C}{R+h}}$

D'où $T = \frac{2\pi \times r}{v} = 2\pi \times r \times \sqrt{\frac{r}{G \times M_C}} = 2\pi \times \sqrt{\frac{r^3}{G \times M_C}}$ ou encore $T^2 = 4 \times \pi^2 \times \frac{r^3}{G \times M_C}$

On obtient donc l'expression de la 3[ème] loi de Képler : $\frac{T^2}{r^3} = constante = \frac{4 \times \pi^2}{G \times M_C}$

**2.6/** Application numérique : T = 15 jours et $r = R + h$ $M_C = \frac{4 \times \pi^2 \times r^3}{G \times T^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times (470.10^3 + 13{,}5.10^6)^3}{6{,}67.10^{-11} \times (15 \times 24 \times 3600)^2}$

Soit $M_C = 9{,}6.10^{20} kg.$

Cette valeur est cohérente avec celle donnée. L'écart est dû à l'approximation du mouvement circulaire (≠elliptique).

## Exercice 2 : L'acide borique

1. **a)** Un acide, selon la définition de Brönsted, est une espèce chimique capable de céder au moins un proton $H^+$.

   Une base, selon la définition de Brönsted est une espèce chimique capable de capter au moins un proton $H^+$.

   **b)** Les deux couples mis en jeu sont : $H_3BO_{3(aq)}$/ $H_2BO_3^-{}_{(aq)}$ $H_3BO_{3(aq)} \rightleftharpoons H_2BO_3^-{}_{(aq)} + H^+$

   et $H_3O^+{}_{(aq)}$ / $H_2O_{(l)}$ $H_3O^+{}_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)} + H^+$

2. Equation de la réaction entre l'ion borate $H_2BO_3^-{}_{(aq)}$ et l'eau :

   $$H_3BO_{3(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftharpoons H_2BO_3^-{}_{(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)}$$

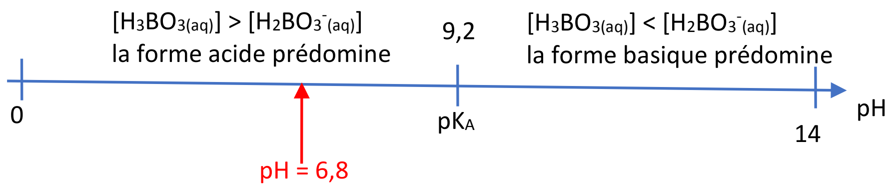
3. $K_A = \frac{[H_3O^+]eq \times [\mathrm{H_2BO_3^-}]eq}{[\mathrm{H_3BO_3}]eq}$

4. $pK_A = -\log K_A$ soit $K_A = 10^{-pKA} = 10^{-9,2}$ $K_A = 6{,}3 \times 10^{-10}$

5. Diagramme de prédominance :

   Lorsque $pH > pK_A$ la forme basique est prédominante.

   Lorsque $pH < pK_A$ la forme acide est prédominante.




A pH = 6,8 l'espèce prédominante est l'acide borique $H_3BO_{3(aq)}$